3. hét, gyakorlat

1. Nevezetes határértékek

Legyen (x_n), (y_n) két számsorozat, melyek határértéke: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, ekkor:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\tan x_n}{x_n} = 1$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a$, visszavezethető erre: (3)

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a(x_n + 1)}{x_n} = \dfrac{1}{\ln a}$, visszavezethető erre: (3, 4)

1. Lemma (Cesàro-Stolz lemma). *Legyen $(x_n), (y_n)$ két számsorozat. (y_n)-ről felteszük, hogy pozitív, szigorúan növekvő és felülről nem korlátos. Ekkor, ha létezik*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A \epsilon \overline{\mathbb{R}}, \textit{ vagyis } \pm\infty \textit{ is lehet} \tag{1}$$

akkor a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ határérték is létezik és értéke A, vagyis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A \tag{2}$$

2. Lemma (Cauchy d'Alambert kritérium). *Legyen (x_n) egy pozitív számsorozat. Ha létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = A$ határérték, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ határérték is létezik, és ennek értéke A, vagyis:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = A \tag{3}$$

3. Lemma (Arány kritérium (sorozathatárértékre)). *Legyen (x_n) egy pozitív számsorozat.*

$$\textit{Ha } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \epsilon \begin{cases} [0,1), \textit{ akkor } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \\ (1,\infty], \textit{ akkor } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty, \\ 1, \textit{akkor semmit nem mondthatunk } x_n \textit{ harárértékéről} \end{cases} \tag{4}$$

Megj. Tipikusan az $x_n = \dfrac{n!}{2^n}$, vagy $y_n = \dfrac{n^n}{n!}$ típusú határértékeknél lehet jól használni.

2. Órai feladatok

Állapítsuk meg az alábbi sorozatok határértékét:

Mértani sorozatok

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-3)^n}{3^n} = ?$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{3^n} = ?$ *Emlékeztető:* $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |p| < 1 \\ 1, & \text{ha} \quad p = 1 \\ \infty, & \text{ha} \quad p > 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha} \quad p \le -1 \end{cases}$

Az e számhoz kapcsolódó határértékek

3. Egyszerű algebrai átalakításokkal közvetlenül igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$

Általános szabály: $\lim\limits_{n_k\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n = ?$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n = ?$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n-2} = ?$

Rekurzív sorozatok

7. $a_1 := \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}. \qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

Gyökös kifejezések

8. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = ?$

Rendőr elv

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n} = ?$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^3 + 2n^2}{3^{2n} + 7n}} = ?$