3. hét, házi és szorgalmi feladatok

1. Nevezetes határértékek

Legyen (x_n), (y_n) két számsorozat, melyek határértéke: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, ekkor:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan x_n}{x_n} = 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a$, visszavezethető erre: (3)

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a(x_n + 1)}{x_n} = \frac{1}{\ln a}$, visszavezethető erre: (3, 4)

1. Lemma (Cesàro-Stolz lemma). *Legyen $(x_n), (y_n)$ két számsorozat. (y_n)-ről felteszük, hogy pozitív, szigorúan növekvő és felülről nem korlátos. Ekkor, ha létezik*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A \epsilon \overline{\mathbb{R}}, \textit{ vagyis } \pm\infty \textit{ is lehet} \tag{1}$$

akkor a $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ határérték is létezik és értéke A, vagyis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A \tag{2}$$

2. Lemma (Cauchy d'Alambert kritérium). *Legyen (x_n) egy pozitív számsorozat. Ha létezik $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = A$ határérték, akkor $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ határérték is létezik, és ennek értéke A, vagyis:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = A \tag{3}$$

3. Lemma (Arány kritérium (sorozathatárértékre)). *Legyen (x_n) egy pozitív számsorozat.*

$$\textit{Ha } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \epsilon \begin{cases} [0,1), \textit{ akkor } \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \\ (1,\infty], \textit{ akkor } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \\ 1, \textit{akkor semmit nem mondthatunk } x_n \textit{ harárértékéről} \end{cases} \tag{4}$$

Megj. Tipikusan az $x_n = \frac{n!}{2^n}$, vagy $y_n = \frac{n^n}{n!}$ típusú határértékeknél lehet jól használni.

2. Házi feladatok

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^n}{3^n + (-5)^n} = ?$

Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, mennyi a határérték?

2. $a_n = \dfrac{3^n}{2^{n+2}}.$

3. $a_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{n+3}.$

Mi az (a_n) sorozat határértéke, ha (a_n) az alábbi, rekurzívan értelmezett sorozat:

4. $a_1 := \sqrt{3}, \quad a_{n+1} := \sqrt{3 + 2a_n}.$

5. $a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \dfrac{2a_n}{n+1}.$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét:

6. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n+3}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-4}{n+5}\right)^{4n+1} = ?$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})) = ?$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^6 + 2^n} = ?$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^{3n+1} + n^4}{8^n + n^2}} = ?$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = ?$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, ahol $x \epsilon \mathbb{R}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{2n-5}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$, fel lehet használni a (3, 4) nevezetes határértékeket

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, ahol $a, b > 0$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{7}}{3}\right)^{2n+1}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p} \sqrt[n]{a_i}}{p}\right)^n$, ahol $a_i > 0$, minden $i = 1, \ldots, p$, továbbá $p \epsilon \mathbb{N}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n+2}{n^2-n+1}\right)^{\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2n+1}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+6n}\log_{10} 6-\sqrt{n^2+2n}\log_{10} 2-\sqrt{n^2+3n}\log_{10} 3$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^3+2n+6)}{\ln(n^6+3n+2)}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_{10}(n^4+10^n)}{\log_{10}(n^6+10^{2n})}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2+e^{3n})}{\ln(n^6+e^{2n})}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^p+1)\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)}{3n^5+2n^2+1}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$, felhasználható a Cesàro-Stolz lemma

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}\cdot n!}{(3n)!}}$, felhasználható a Cauchy-d'Alambert kritérium

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}{n!}}$

[Gyak] $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{d'Alambert}}{=\!=\!=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n!\cdot(n+1)}\cdot\frac{n!}{n^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$, aránykritériummal

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$, rendőr elvet felhasználva

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n!+1}{n!}\right)^{2^n}$

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b^k}$, $a<b$

32. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b^k}$, $a > b$

33. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{\ln(n)\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{n^{k-1}}}$