1. hét

Témák:

- Jelölések gyakorlása :$\sum_{k=1}^{n} a_k$ és $\prod_{k=1}^{n} a_k$ jelentése
- Valós számok: racionális és irracionális számok
- Teljes indukció

Órai feladatok:

Jelölések gyakorlása $\sum_{k=1}^{n} a_k$ és $\prod_{k=1}^{n} a_k$ jelentése:

1. Konkrtét számokkal, behelyettesítve: pl. ha $a_1 = 1$, $a_2 = 12$, $a_3 = -2$, $a_4 = 0$, $a_5 = 9$, akkor
$$\sum_{k=1}^{4} a_k = ?, \qquad \sum_{j=2}^{3} a_{j-1} = ?, \qquad \sum_{n=1}^{3} a_1 = ?, \qquad \ldots$$
Ehhez hasonlókat szorzatra.
Kettős indexek még ne legyenek.

2. Fordított feladat: Írjuk fel zárt formulával:
   (a) első n páros szám összege
   (b) 3-mal osztható kétjegyű számok összege
   (c) 100 és 200 közotti természetes számok reciprokainak összege

Valós számok:

3. Igazoljuk, hogy $\sqrt{3}$ nem racionális.
4. Igazoljuk, hogy ha a racionális és x irracionális, akkor $x + a$ is irracionális.

Igazoljuk teljes indukcióval:

5. Első n szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$, ha $n \epsilon \mathbb{N}$.
   (a) Írjátok fel képlettel a feladatot a szummás felírás gyakorlásaképp
   (b) Teljes indukciós bizonyítás.

6. Első n négyzetszám összege $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

   (a) Felírás képlettel - szummás felírás gyakorlásaképp.

   (b) Teljes indukciós bizonyítás.

7. Lássuk be $\forall n \epsilon \mathbb{N}$ esetén:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

8. Igazoljuk, hogy $2^n > n^2$, ha $n > 4$, $n\epsilon\mathbb{N}$.

9. Igazoljuk a háromszög-egyenlőtlenséget teljes indulcióval:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

   ahol $n\epsilon\mathbb{N}$ természetes szám, $n \geq 2$ és $a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots a_n\epsilon\mathbb{R}$ tetszőleges valós számok.

   (Itt figyelni kell arra, hogy a teljes indukció kiinduló lépése $n = 2$ lesz! Ez sem triviális...)

Házi feladatok

1. Igazoljuk teljes indukcióval: $3^n > n^3$, ha $n > 3$, $n\epsilon\mathbb{N}$.

2. Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}: \qquad \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

3. Igazoljuk teljes indukcióval: $2^{4n+1}+3$ mindig osztható 5-tel ($n\epsilon\mathbb{N}$)

4. Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

5. Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1.$$

6. Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall n\epsilon\mathbb{N}: \qquad \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\cdot\sqrt{n}$$

7. Igazoljuk, hogy ha a racionális és x irracionális, akkor $x \cdot a$ is irracionális.