Differenciálegyenletek megoldása próbafüggvény-módszerrel

Ez még nem a végleges változat, utoljára módosítva: 2012. április 9.19:38.

Elsőrendű egyenletek

Legyen adott egy elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet. Ennek általános alakja

$$ay' + by = Q(x),$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $Q(x)$ x-nek valamilyen függvénye, amit *zavaró függvénynek* nevezünk. Néhány esetben, amikor a zavaró függvény speciális alakú (polinom-, exponenciális-, szinusz- vagy koszinuszfüggvény, továbbá ezek összege, különbsége, szorzata, szorzatuk összege, különbsége), akkor a differenciálegyenlet partikuláris megoldása a $Q(x)$ zavaró függvényhez hasonló szerkezetű lesz. Éppen ezért általános alakban próbálkozunk felírni a zavaró függvényhez hasonló megoldást, majd az egyenletbe helyettesítve azt, a megfelelő együtthatók meghatározásával megkapjuk az inhomogén rész megoldását. A következőkben néhány példán mutatjuk be, hogy bizonyos zavaró függvények esetében milyen próbafüggvényt érdemes felírnunk.

Amennyiben a zavaró függvény egy n-edfokú (esetleg hiányos) polinomfüggvény, akkor célszerű a

$$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \ldots + K_2 x^2 + K_1 x + K_0$$

próbafüggvényt felírni, ahol a K_i értékek a kiszámítandó (valós) együtthatók. Például ha egy harmadfokú polinom a zavaró függvény, akkor az $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ alkalmas próbafüggvény.

Példa. Adjuk meg az $y' - 2y = 4x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Először az $y' - 2y = 0$ homogén egyenlet megoldását határozzuk meg, ami egy szeparábilis egyenlet, a megoldása

$$y_h = c \cdot \mathrm{e}^{-\int -2\,\mathrm{d}x} = c \cdot \mathrm{e}^{2x}.$$

A zavaró függvény egy elsőfokú polinom, tehát próbafüggvény-módszerrel a partikuláris megoldást a következő alakban célszerű keresni:

$$y_p = Ax + B$$

Ezt, illetve ennek a deriváltját (y_p'-t) helyettesítjük vissza az eredeti inhomogén egyenletbe, majd összehasonlítjuk az egyenlet két oldalát, így információt kapunk A-ról és B-ről.

$$A - 2\,(Ax + B) = 4x$$

$$-2Ax + A - 2B = 4x$$

A fenti egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $-2A = 4$ és $A - 2B = 0$ teljesül, tehát $A = -2$ és $B = -1$ a megfelelő választás. Ezek alapján a partikuláris megoldás

$$y_p = -2x - 1,$$

a differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$y = y_h + y_p = c \cdot \mathrm{e}^{2x} - 2x - 1.$$

Amennyiben a zavaró függvény tartalmazza a $\sin(ax + b)$ vagy $\cos(cx + d)$ alakú függvények egyikét (esetleg mindkettőt), akkor a felírt próbafüggvénynek tartalmaznia kell az $A\sin(ax + b) + B\cos(cx + d)$ kifejezést, nem elég, ha csak a szinusz- vagy a koszinuszfüggvény van benne.

Példa. Adjuk meg az $y' - 4y = \dfrac{25}{4}\cos(3x) + 2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

A homogén rész megoldása $y_h = c \cdot \mathrm{e}^{4x}$. Mivel a zavaró függvényben szerepel a $\cos(3x)$ függvény, ezért a próbafüggvény mindenképpen tartalmazza majd az $A\sin(3x) + B\cos(3x)$ kifejezést. A zavaró függvény második tagja egy konstans (nulladfokú polinom), ezért az alkalmas próbafüggvény az

$$y_p = A\sin(3x) + B\cos(3x) + C$$

lesz. Ezt deriválva, majd az eredeti egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$3A\cos(3x) - 3B\sin(3x) - 4\,(A\sin(3x) + B\cos(3x) + C) = \frac{25}{4}\cos(3x) + 2,$$

amit a benne szereplő függvények szerint rendezve a

$$(3A-4B)\cos(3x)+(-4A-3B)\sin(3x)-4C=\frac{25}{4}\cos(3x)+2$$

egyenletet nyerjük. Ez pontosan akkor teljesül, ha $C=-\frac{1}{2}$, valamint $3A-4B=\frac{25}{4}$ és $-4A-3B=0$ is teljesül. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása az $A=\frac{3}{4}$ és a $B=-1$, tehát a differenciálegyenlet partikuláris részének megoldása

$$y_p=\frac{3}{4}\sin(3x)-\cos(3x)-\frac{1}{2}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása az előbbiek alapján

$$y=y_h+y_p=c\cdot \mathrm{e}^{4x}+\frac{3}{4}\sin(3x)-\cos(3x)-\frac{1}{2}.$$

Előfordulhat, hogy a differenciálegyenlet homogén részére kapott megoldás „ugyanolyan", mint a zavaró függvény alapján felírt próbafüggvény, vagy annak egyik tagja, azaz konstans együtthatótól eltekintve megegyeznek (hányadosuk állandó). Ebben az esetben beszélünk *rezonanciáról*, ilyenkor érdemes az eredeti próbafüggvény x-szeresét választani próbafüggvénynek.

Példa. Oldjuk meg az $y'-2y=\mathrm{e}^{2x}+x$ differenciálegyenletet.
A homogén rész megoldása $y_h=c\cdot\mathrm{e}^{2x}$. A zavaró függvény alapján felírt próbafüggvény az

$$y_p=A\mathrm{e}^{2x}+Bx+C$$

lenne, azonban az első tag rezonálni fog a homogén rész megoldásával, ezért annak x-szeresét vesszük:

$$y_p=Ax\mathrm{e}^{2x}+Bx+C.$$

Deriváljuk, majd visszahelyettesítjük az inhomogén differenciálegyenletbe:

$$A\mathrm{e}^{2x}+2Ax\mathrm{e}^{2x}+B-2\left(Ax\mathrm{e}^{2x}+Bx+C\right)=\mathrm{e}^{2x}+x.$$

Az $x\mathrm{e}^{2x}$-es tagok kiejtik egymást.

$$A\mathrm{e}^{2x}-2Bx-2C+B=\mathrm{e}^{2x}+x,$$

ahonnan kapjuk, hogy $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$ és $C=-\frac{1}{4}$. Ezek alapján a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y=c\cdot\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}.$$

Másodrendű egyenletek

Egy állandó együtthatós másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános alakja

$$ay''+by'+cy=Q(x),$$

ahol most is $a,b,c\in\mathbb{R}$ és $Q(x)$ a zavaró függvény. Ha ez a zavaró függvény – akárcsak az elsőrendű esetben – speciális alakú, akkor kereshetjük a másodrendű egyenlet megoldását is próbafüggvény-módszerrel. Ehhez először is meg kell határoznunk az egyenlethez rendelt homogén egyenlet általános megoldását, majd meg kell adnunk egy alkalmas partikuláris megoldást (ebben lesz segítségünkre a próbafüggvény).

Homogén egyenletek

A fenti állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet akkor homogén, ha $Q(x)=0$. Ebben az esetben az $y=0$ mindenképp megoldás lesz, ezt nevezzük *triviális* megoldásnak. A többi megoldás előállításához szükségünk lesz a differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletére*. Ez egy másodfokú egyenlet lambdában, melynek együtthatóit a differenciálegyenlet megfelelő együtthatói adják:

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0.$$

A karakterisztikus egyenlettől függően a következő esetek lehetségesek:

1. Az egyenletnek *két különböző valós* gyöke van, λ_1 és λ_2. Ekkor az egyenlet általános megoldása
$$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$
lesz.
2. Az egyenletnek egy *kétszeres valós* gyöke van, λ. Ebben az esetben az egyenlet általános megoldása
$$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}.$$
3. Az egyenletnek *két komplex* gyöke van (egymás konjugáltjai), $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ és $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Az egyenlet általános megoldása most is felírható
$$y = c_1 \cdot \mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 \cdot \mathrm{e}^{(\alpha-\beta i)x}$$
alakban, de inkább a képzetes egységet nem tartalmazó
$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$$
alakot szokás használni.

Inhomogén egyenletek

Az elsőrendű esethez hasonlóan fogunk eljárni, amikor próbafüggvény-módszerrel keressük egy inhomogén másodrendű egyenlet megoldását. Elsőként előállítjuk az egyenlethez rendelt homogén egyenletet, és megadjuk az általános megoldását. Ezután felírunk egy alkalmas próbafüggvényt a $Q(x)$ zavaró függvény alapján, visszahelyettesítjük az inhomogén egyenletbe, és meghatározzuk a próbafüggvényben szereplő ismeretlen együtthatókat. Az inhomogén egyenlet megoldása most is a homogén rész megoldásának és a próbafüggvényre kapott partikuláris megoldásnak az összege lesz.

Példa. Add meg az $y'' + y = 3x^2$ egyenlet általános megoldását.

Az egyenlethez rendelt homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete
$$\lambda^2 + 1 = 0,$$
amelynek két komplex gyöke van, $\lambda_1 = i = 0 + 1i$ és $\lambda_2 = -i = 0 - 1i$. A homogén rész megoldása ezért $y_h = \mathrm{e}^{0x}\left(c_1 \cos(1x) + c_2 \sin(1x)\right) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$. Mivel most a zavaró függvény egy másodfokú polinom, ezért a partikuláris megoldást célszerű az
$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$
próbafüggvény segítségével meghatároznunk. Vesszük y_p első, majd második deriváltját, ezeket visszahelyettesítjük az inhomogén egyenletbe.
$$2A + Ax^2 + Bx + C = 3x^2,$$
amiből rögtön következik, hogy $A = 3$, $B = 0$ és $C = -6$ a próbafüggvény megfelelő együtthatóinak értéke. Ezek alapján az egyenlet általános megoldása
$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + 3x^2 - 6.$$

Eddig, ha egy n-edfokú polinom volt a zavaró függvény, akkor próbafüggvényként is egy n-edfokú polinomot írtunk fel. A következő példa azt mutatja, hogy ez nem minden esetben működik.

Példa. Add meg az $y'' + 2y' = 12x^2 - 2$ egyenlet $y(0) = 0$ és $y(-0.5) = -1 - \mathrm{e}$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldását.

A homogén rész karakterisztikus egyenlete
$$\lambda^2 + 2\lambda = 0,$$
melynek két különböző valós gyöke van, $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = -2$, ezért a homogén megoldás $y_h = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}$. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását kereshetjük próbafüggvénnyel, mivel a zavaró függvény egy másodfokú polinom. Célszerűnek tűnhet most is az $Ax^2 + Bx + C$ választás, azonban a differenciálegyenletet alaposabban megvizsgálva ez mégsem lesz megfelelő. Az egyenlet ugyanis nem tartalmazza az y tagot, csak az y' és y'' tagokat, tehát ha másodfokú polinomot választanánk próbafüggvénynek, akkor visszahelyettesítés után az egyenlet bal oldalán egy legfeljebb elsőfokú polinomot kapnánk. Ennek az együtthatóit viszont nem

tudnánk úgy választani, hogy az megegyezzen a zavaró függvénnyel, azaz egy másodfokú polinommal. Ezért most célszerű egy magasabb fokszámú, esetükben harmadfokú polinommal próbálkozni.

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

majd ennek deriváltjait visszahelyettesítjük az eredeti egyenletbe:

$$6Ax + 2B + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12x^2 - 2.$$

Látható, hogy $A = 2$, $B = -3$ és $C = 2$ esetén teljesül az egyenlőség. Az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Az inhomogén részre felírt y_p partikuláris megoldásban szerepelt még egy D konstans is, ennek értékét – mivel deriváláskor úgyis eltűnik – kedvünk szerint választhatjuk, legkényelmesebb nullának választani (egyébként pedig „beolvad" a c_1 konstansba).

A kezdeti feltételeknek eleget tevő partikuláris megoldást a c_1 és c_2 konstansok alkalmas megválasztásával kapjuk. Az $y(0) = 0$ feltétel akkor teljesül, ha

$$0 = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot 0} + 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = c_1 + c_2,$$

azaz

$$c_1 = -c_2.$$

A második feltétel pedig akkor, ha

$$-1 - \mathrm{e} = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{e}^{-2\cdot(-0.5)} + 2 \cdot (-0.5)^3 - 3 \cdot (-0.5)^2 + 2 \cdot (-0.5) = c_1 + c_2 \cdot \mathrm{e} - 2,$$

az előbb kapott összefüggés alapján

$$-1 - \mathrm{e} = c_1 - c_1\mathrm{e} - 2$$

$$1 - \mathrm{e} = c_1(1 - \mathrm{e}).$$

Ezek alapján a $c_1 = 1$ és $c_2 = -1$ konstansokkal felírt

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-2x} + 2x^3 - 3x^2 + 2x.$$

partikuláris megoldás kielégíti a megadott differenciálegyenletet és a kezdeti feltételeket is.

Példa. Add meg a $4y'' + y = 85(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{2x})$ egyenlet általános megoldását.

A homogén rész karakterisztikus egyenletének két komplex gyöke $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}i$ és $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}i$, tehát a homogén rész megoldása $y_h = c_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Az inhomogén egyenlet jobb oldalán álló zavaró függvény két exponenciális függvény összege, így alkalmazhatjuk a próbafüggvény-módszert például az

$$y_p = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}.$$

választással. A megfelelő tagokat az eredeti egyenletbe helyettesítjük:

$$4\left(A\mathrm{e}^{-x} + 4B\mathrm{e}^{2x}\right) + A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x} = 85\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{2x}\right).$$

A zárójeleket mindkét oldalon felbontva azt kapjuk, hogy

$$5A\mathrm{e}^{-x} + 17B\mathrm{e}^{2x} = 85\mathrm{e}^{-x} - 85\mathrm{e}^{2x},$$

amiből egyszerűen adódik az $A = 17$ és $B = -5$ választás. Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 17\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{2x}.$$

Példa. Oldd meg az $y'' + y = (x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ differenciálegyenletet.

A homogén rész megoldása $y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$. Az inhomogén egyenlet jobb oldalán álló zavaró függvény egy elsőfokú polinom és egy exponenciális kifejezés szorzata, tehát felírható rá egy megfelelő próbafüggvény. Mivel a zárójelet akár fel is bonthatnánk – ekkor két tagból állna a zavaró függvény – ezért elegendő a polinom tagjait ellátni az ismeretlen együtthatókkal, az exponenciális tagot külön nem szükséges.

$$y_p = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-x},$$

aminek második deriváltját véve, majd visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe kapjuk, hogy

$$-2A\mathrm{e}^{-x} + 2(Ax + B)\mathrm{e}^{-x} = (x + 1)\mathrm{e}^{-x},$$

melyet rendezve a

$$2Ax\mathrm{e}^{-x} + (2B - 2A)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$$

egyenlethez jutunk. Látható, hogy az $A = \dfrac{1}{2}$ és $B = 1$ választás megfelelő, tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Az elsőrendű egyenletekhez hasonlóan a másodrendűeknél is előfordulhat a rezonancia. Most is úgy érdemes eljárni, hogy a zavaró függvény alapján felírt próbafüggvény x-szeresét vesszük, ugyanis ebben az esetben az egyszeres rezonancia megszűnik.

Példa. Add meg az $y'' + 9y = \sin(3x) - \cos(3x)$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Mivel a homogén rész karakterisztikus egyenletének két komplex gyöke van: $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, ezért a homogén rész megoldása $y_h = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$. Ha az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény-módszerrel keressük, akkor figyelembe kell vennünk, hogy a homogén részre kapott megoldás hasonló a zavaró függvényhez, rezonancia lép fel. Éppen ezért próbafüggvénynek célszerű most az x-szel megszorzott

$$y_p = Ax\cos(3x) + Bx\sin(3x)$$

függvényt választani, ekkor a rezonancia megszűnik. Ezt és ennek második deriváltját helyettesítve az inhomogén egyenletbe kapjuk, hogy

$$-6A\sin(3x) - 9Ax\cos(3x) + 6B\cos(3x) - 9Bx\sin(3x) + 9\left(Ax\cos(3x) + Bx\sin(3x)\right) = \sin(3x) - \cos(3x).$$

A kieső tagok elhagyása után a

$$-6A\sin(3x) + 6B\cos(3x) = \sin(3x) - \cos(3x)$$

egyenlethez jutunk, amiből adódnak az $A = -\dfrac{1}{6}$ és $B = -\dfrac{1}{6}$ konstansok. A differenciálegyenlet megoldása tehát

$$y = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) - \frac{1}{6}x\sin(3x) - \frac{1}{6}x\cos(3x).$$

Példa. Add meg az $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x} + 4x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

A karakterisztikus egyenletnek a $\lambda = 2$ kétszeres valós gyöke, így ahomogén rész megoldása $y_h = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2x\mathrm{e}^{2x}$. A zavaró függvény alapján próbálkozhatnánk az

$$y_p = A\mathrm{e}^{2x} + Bx + C$$

próbafüggvény felírásával, ennek első tagja azonban rezonálna a homogén megoldás első tagjával. Ha x-szel szorozzuk, akkor pedig

$$y_p = Ax\mathrm{e}^{2x} + Bx + C$$

a homogén megoldás második tagjával rezonálna, ezért célszerű ismét x-szel szorozni, így az alkalmas próbafüggvény az

$$y_p = Ax^2\mathrm{e}^{2x} + Bx + C$$

lesz, melyet deriváltjaival együtt visszahelyettesítve a

$$4Ax^2\mathrm{e}^{2x} + 8Ax\mathrm{e}^{2x} + 2A\mathrm{e}^{2x} - 4(2Ax^2\mathrm{e}^{2x} + 2Ax\mathrm{e}^{2x} + B) + 4(Ax^2\mathrm{e}^{2x} + Bx + C) = \mathrm{e}^{2x} + 4x$$

egyenletet kapjuk. Ezt csoportosítva a

$$2A\mathrm{e}^{2x} + 4Bx - 4B + 4C = \mathrm{e}^{2x} + 4x$$

egyenletet nyerjük, amiből rögtön adódik, hogy az $A = \dfrac{1}{2}$, $B = 1$ és $C = 1$ választás megfelelő, vagyis az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + x + 1.$$